

La matematica dei prestiti e dei conti correnti: come far luce su una strana contesa

SOMMARIO: 1. Introduzione. – 2. Un'operazione che risulta “equa” se valutata in interesse composto si svolge necessariamente in quel regime. – 3. Il regime di svolgimento dei prestiti. – 4. La matematica dei conti correnti e quella dei prestiti: due regimi finanziari diversi. – 5. La valutazione di un prestito, e la definizione di “interesse composto”. – 6. Nota autobiografica.

1. Introduzione.

La contesa di cui nel titolo riguarda una piccola serie di articoli¹ stimolati dalla diatriba sulla liceità dell'ammortamento alla francese, cui la recente sentenza della Corte di Cassazione (n. 15130/2024) dovrebbe

¹ Li elenchiamo in ordine di apparizione, numerandoli progressivamente per comodità di riferimento:

⁽¹⁾ MARI e ARETUSI, *Sull'esistenza e unicità dell'ammortamento dei prestiti in regime lineare*, in *Il risparmio*, 2018;

⁽²⁾ MARI e ARETUSI, *Sull'ammortamento dei prestiti in regime composto e in regime semplice: alcune considerazioni concettuali e metodologiche*, in *Il risparmio*, 2019;

⁽³⁾ CACCIAFFESTA, *Prestiti reali e loro modellizzazioni: a proposito di due articoli di C. Mari e G. Aretusi su “il Risparmio”*, in *Il risparmio*, 2023;

⁽⁴⁾ MARI e ARETUSI, *Errori, nonsense e mistificazioni nello scritto di F. Cacciafesta*, in *Il risparmio*, 2023;

⁽⁵⁾ CACCIAFFESTA, *A proposito di un articolo di C. Mari e G. Aretusi su “il Risparmio”*, 2023, disponibile su https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4742031;

⁽⁶⁾ ARETUSI, MARI e PROVENZANO, *Anatocismo e interesse composto: quando la matematica e il diritto parlano la stessa lingua*, in *Dir. banc.*, 2023, I, pp. 37 ss;

⁽⁷⁾ CACCIAFFESTA, *Valutare un prestito è altro da progettarlo (a proposito di un articolo di Aretusi, Mari e Provenzano)*, in *Dir. banc.*, 2023, I, pp. 423 ss;

⁽⁸⁾ ARETUSI, MARI e PROVENZANO, *Note critiche su “Valutare un prestito è altro da progettarlo” di F. Cacciafesta*, in *Dir. banc.*, 2024, I, pp. 413 ss.

aver messo fine. Non sappiamo quanti se ne siano interessati; ma temiamo che la maggior parte dei lettori ne abbia solo tratto la convinzione che vi sono larghe zone d'ombra nella questione: se neppure i matematici sono d'accordo tra loro...

Parliamo di una contesa strana perché, secondo G.C. Rota (matematico “di livello internazionale”), la matematica è il gioco delle verità. Non esistono, in essa, opinioni diverse, ma solo – appunto – “verità” (ossia conseguenze logiche delle definizioni e degli assiomi), e “errori” (ossia, sistemi di definizioni/assiomi incoerenti, o deduzioni logicamente difettose). Gli errori sono destinati, prima o poi, ad essere unanimemente riconosciuti come tali. Due critici d'arte hanno diritto di restare ognuno della sua opinione; due matematici degni di questa qualifica, no.

L'ultimo intervento dei nostri interlocutori (articolo n. 8 della nota 1: ad esso si riferiranno tutte le citazioni non altrimenti specificate) ha il pregio di isolare con molta chiarezza quelle che noi giudichiamo le criticità della loro posizione, in una forma che davvero consente anche ai non tecnici di stimarne la validità.

La loro tesi centrale è la seguente. Per tutti i contratti di prestito in uso in Italia², la somma dei valori attuali (al tempo iniziale) delle rate nette dovute dal debitore, calcolati in interesse composto al tasso previsto per la remunerazione del prestito, ne uguaglia l'ammontare. Da questa “relazione di equivalenza (o di equità) in interesse composto”, essi desumono senz'altro che l'operazione si svolge, appunto, nel regime dell'interesse composto, con conseguente, ineluttabile, formazione di interessi da interessi.

Obiettiamo, ed ordinatamente argomenteremo: dalla relazione di equivalenza si ricava che il prestito genera lo stesso flusso di ricavi che il finanziatore otterrebbe investendo in interesse composto, a quel tasso, la somma che presta. Ma l'uguaglianza si ferma al livello dei risultati, e non della loro modalità di formazione: che è ciò di cui si occupano le norme “anti-interesse composto”. La difesa contro costi eccessivi è demandata alla legislazione anti-usura.

È elementare dimostrare che i prestiti in uso si svolgono secondo una legge finanziaria che con quella dell'interesse composto non ha niente a che vedere. A torto i Nostri la identificano con una di quelle, ben

² Sottolineiamo: non solo quelli ad ammortamento francese. A questi, giustamente, non è attribuita alcuna proprietà particolare.

diverse, internazionalmente note come “del *periodically compounded interest*”: ne parleremo ampiamente.

Più in generale, essi danno al concetto di “equivalenza” in Matematica Finanziaria una portata ben lontana dalla reale. Su questo, non ci sentiamo di insistere troppo, perché è capitato anche a noi di incorrere in un errore del genere: siamo, però, riusciti a superarlo. Meno giustificabile è il fatto conclamato che i Nostri ignorino la teoria della valutazione dei prestiti, e mostrino gravi incertezze perfino nella definizione dell’interesse composto: ciò che, a rigore, rende alquanto grottesca la discussione. Discussione che, aggiungiamo, avrebbe tutto da guadagnare se essi sostituissero le molte ironie con almeno qualche argomentazione logica. Non ne abbiamo trovato traccia, al di là di rimandi approssimativi a pubblicazioni altrui.

La conclusione che proponiamo è (dosiamo le parole) che questi autori affrontino la questione con un’attenzione non sufficiente, e quanto asseriscono sia *in toto* da respingere.

2. Un’operazione che risulta “equa” se valutata in interesse composto si svolge necessariamente in quel regime.

L’affermazione che dà il titolo a questo paragrafo sembra agli autori talmente ovvia, che ritengono *stupefacente* (p. 415) porla in dubbio³. Eppure, dire che ci si sta muovendo alla velocità di un treno merci non significa che si sta viaggiando su quel mezzo di trasporto.

Come la giustificano essi? Osservando (ivi) che, secondo Ottaviani⁴, «la condizione di equità in regime composto è... condizione necessaria e sufficiente a garantire l’impiego della somma prestata secondo la legge finanziaria dell’interesse composto». Manca l’indicazione del luogo dal quale proverrebbe la citazione: abbiamo il diritto di dubitare della sua autenticità, vista la povertà e la vaghezza dell’espressione «*garantire l’impiego*», che lascia pensare a problemi di difesa di un posto di lavoro; ma, soprattutto, data la presenza di quel «*condizione necessaria e suffi-*

³ Ancora più categorico quanto si legge a pag. 427: «*costituisce un dato inconfutabile che i prestiti abitualmente in uso nel mercato del credito sono strutturati...in regime di capitalizzazione composta*». Lo confutiamo volentieri.

⁴ Il quale, secondo loro, «*rappresenta uno dei riferimenti più autorevoli della Matematica Finanziaria*». Sottoscriviamo.

ciente» su cui non concordiamo affatto. Noi, nelle *Lezioni di Matematica Finanziaria* di Ottaviani (testo che richiameremo ancora) leggiamo solo, a p. 106, che, se vale la condizione di equità, «*il contratto equivale all'impiego della somma prestata secondo la legge finanziaria dell'interesse composto*», al tasso di remunerazione del prestito. Il che è vero, a patto d'intendersi sul significato della parola *equivale*.

È vero che chi concede il prestito riscuote un flusso di ricavi che potrebbe ottenere, alternativamente, investendo la stessa somma in interesse composto a quello stesso tasso; ma l'equivalenza si esaurisce a questo livello. Non è, infatti, vero che i due impieghi generino lo stesso montante finale: a questo scopo, occorre che i ricavi del prestito vengano reinvestiti ancora allo stesso tasso, ciò che non sempre e non per tutti è possibile fare. Di più, e molto più in generale, la dinamica del capitale investito è, nei due casi, del tutto diversa: gl'interessi (i frutti dell'investimento) si generano con tempi e modalità diverse.

Escluso dunque il valore probatorio della relazione di equivalenza, ci siamo permessi di ricordare, appunto, che la Corte di Cassazione ha stabilito (sentenza n. 191/1964) che gl'interessi, nel periodo tra una scadenza di pagamento e la successiva, si generano linearmente, e non esponenzialmente: come accadrebbe se l'operazione fosse regolata dal regime composto.

È stato risposto (p. 423) che l'osservazione è irrilevante, perché riguarda una questione che si presenta solo quando vi sia una cessazione anticipata del rapporto. Ciò non è vero, perché il problema di conoscere l'entità degl'interessi maturati si pone anche quando il credito venga ceduto; quindi, molto più spesso.

Ma soprattutto, la maggiore o minore importanza pratica non intacca affatto il valore teorico: resta dimostrato che il prestito non si svolge in interesse composto.

3. Il regime di svolgimento dei prestiti.

Il combinato disposto della sentenza appena ricordata e di quella, diremmo pleonastica, che proibisce esplicitamente la capitalizzazione degl'interessi (Cass., n. 5286/2000), individua univocamente, come regime finanziario di svolgimento dei prestiti, quello dell'interesse semplice, con (eventuale, ma frequentissimo) pagamento periodico degl'interessi e (anch'essa, eventuale) procedura di rimborso progressivo. Sarà comodo indicarlo con l'acronimo *i.s.p.p.i.*

Riguardo questo regime, i Nostri osservano che non ve ne è traccia in alcun manuale. Rispondiamo che neanche la moltiplicazione $712.641 \times 1.084,108$ si trova svolta da qualche parte⁵, ma non mette in difficoltà nessuno che sappia un po' di aritmetica. Ci accusano, inoltre, di aver usato per esso denominazioni diverse (*«via via più pittoresche»*). È vero, ma quella iniziale (*«interesse semplice corretto»*) era assai poco trasparente; e parlare, come anche abbiamo fatto, di *«eventuale pagamento inframmezzato (quasi sempre, periodico) degli interessi»* è corrisposto ad un tentativo di generalizzazione cui abbiamo preferito rinunciare.

Ci accusano, infine, di “non illuminarli” *«con una definizione, né con una formula che [li] possa aiutare a dare forma al [nostro] pensiero, ad esempio una formula che ne caratterizzi il montante»*. Della definizione non ci sembra davvero vi sia bisogno: “parla” il nome. La formula, è stata fornita direttamente ad uno degli autori, su sua richiesta, con messaggio di posta elettronica in data 21 febbraio 2023.

Pur disponendo, dunque, di una denominazione ormai chiarissima e di una formula, essi confondono questo con un regime del tutto diverso, che descriveremo nel prossimo paragrafo.

4. La matematica dei conti correnti e quella dei prestiti: due regimi finanziari diversi.

È cognizione comune che gl'interessi con i quali gl'istituti remunerano i depositi in conto corrente si generano linearmente (l'interesse semestrale è metà di quello annuale), e ogni 31 dicembre vengono accreditati, o “capitalizzati”: ossia aggiunti al capitale depositato, e da quel momento parte integrante di esso. Se in un conto non si fanno altri movimenti al di fuori di un versamento iniziale (l'ipotesi è inverisimile, perché il conto “corre” per definizione, ma non è concettualmente inaccettabile) la sua dinamica segue la legge finanziaria classicamente detta *«della capitalizzazione mista»*, ma una cui denominazione meno criptica è *«dell'interesse semplice, con capitalizzazione annua degl'interessi»*: a patto di convenire che l'aggettivo “annuo” abbia qui il valore non di “ogni 365 giorni”, ma di “ogni 31 dicembre”. Gli autori di lingua inglese parlano, più brevemente, di *«yearly compounded interest»*. Noi, useremo

⁵ Almeno, crediamo...

l'acronimo *i.s.c.p.i.* la lettera “p” stando, ovviamente, per “periodici”. È evidente, infatti, che si può procedere ad una capitalizzazione più o meno frequente (torneremo su ciò nel par. 5).

Supponiamo ora, invece, che alla data del 31 dicembre gl'interessi di competenza dell'anno appena concluso vengano non capitalizzati, ma liquidati al titolare del conto, che li destina al consumo (o ad altro impiego: è del tutto indifferente qui, per ora). La legge che regola l'operazione diventa quella che nel par. 2 abbiamo convenuto di chiamare *i.s.p.p.i.*⁶

Che i due possibili impieghi (il primo, con la capitalizzazione; il secondo, con il pagamento annuo degl'interessi) siano diversi, è cosa che diremmo di evidenza solare. Gli autori ritengono, invece, che essi coincidano (pag. 416).

Essi basano il loro convincimento sul fatto che nel 2020 l'argomento è stato «*affrontato [sic] in un articolo dal titolo eloquente “Pagare vuol dire capitalizzare”... se, dunque, pagare vuol dire capitalizzare, quale dovrebbe essere la differenza tra i due regimi?*».

Noi, matematici modesti e di tipo primitivo, non riteniamo che l'esistenza di un articolo «*dal titolo eloquente*» basti per dimostrare alcunché.

La verità è, infatti, molto diversa; più faticosa da formulare, se si vuole evitare di usare l'insidioso termine “capitalizzare” due volte con due significati diversi. Eccola: pagare mette chi riceve in condizioni, se vuole, di investire (“capitalizzare”) quanto incassa; e libera chi paga dall'obbligo di investire a sua volta per far fronte ad un onere che, se gli interessi non sono stati pagati ma “capitalizzati”, è aumentato. Dal punto di vista del debitore, dunque, pagare è il contrario di capitalizzare.

I nostri autori hanno anche proposto quella che ritengono una dimostrazione diretta della loro tesi. Essa consiste nell'argomentare che se il titolare del conto corrente ritira gl'interessi e li investe allo stesso tasso con cui il conto è remunerato, allora è come se li avesse lasciati accreditati. Il che è certo vero, ma non vale a provare che i due impieghi (ripetiamo: uno, con la capitalizzazione; l'altro, con il pagamento annuo degl'interessi) coincidano *sic et simpliciter*: lo fanno, nel caso che ricorrano particolari condizioni. Non è affatto ovvio che quel titolare abbia la possibilità (o il desiderio) di svolgere quelle operazioni di contorno.

⁶ La natura delle due leggi *i.s.p.p.i.* e *i.s.c.p.i.* non cambia se pagamento o capitalizzazione degl'interessi avvengono senza periodicità. Come già detto, preferiamo non insistere su questo livello di generalizzazione.

5. La valutazione di un prestito, e la definizione di "interesse composto".

La tesi centrale del nostro articolo n. 7 è che valutare un prestito è operazione diversa dal pattuirlo e concordarne il piano d'ammortamento, e si svolge successivamente a questa fase. La risposta dei Nostri, al netto di varie ironie, si legge alle loro pagg. 420-421: *«Se progettare un prestito significa costruirne il piano d'ammortamento mentre valutare un prestito, per Cacciafesta, vuol dire partire dal piano d'ammortamento, il piano d'ammortamento deve essere costruito in entrambi i casi...; dunque sembra, senza pericolo di ledere alcun principio di carattere matematico o giuridico, che sia possibile utilizzare le due locuzioni [valutazione e progettazione] come sinonimiche»*.

È facile obiettare che per fotografare un edificio occorre prima che qualcuno lo costruisca; fotografare e costruire non sono, però, «*locuzioni sinonimiche*».

Notiamo, più seriamente, che i Nostri confondono il valore di un credito con il suo ammontare nominale (pag. 420): ciò che costituisce un abbaglio grossolano. Può essere loro di grande aiuto un'attenta lettura delle pp. dalla 123 alla 168 delle già citate *Lezioni di Matematica Finanziaria* del giustamente lodato Ottaviani, dedicate per intero alla valutazione dei prestiti, e successive a quelle (dalla p. 105 alla p. 123) in cui si tratta invece della costruzione dei piani d'ammortamento. Scopriranno così che si tratta di operazioni del tutto distinte; quella della valutazione richiedendo (Ottaviani, p. 124) la scelta di un tasso *che può essere diverso* da quello fissato per la remunerazione del prestito.

È forse ingeneroso insistere, ma ancora pochi anni fa tutti gli studenti di Matematica Finanziaria conoscevano la formula di valutazione dovuta a Makeham, nella quale i due tassi ora citati compaiono con ruoli chiaramente distinti.

Riteniamo anche di non poter lasciar cadere un'altra importante questione.

Abbiamo accennato, nel par. 4, al fatto che si può pensare ad una capitalizzazione (o composizione: *compounding*) degli interessi di periodicità non necessariamente annua, ma qualunque⁷. La legge dell'interesse composto è definita "mandando a 0" (nel senso dell'Analisi Matematica) la lunghezza degli intervalli in capo a ciascuno dei quali si effettua

⁷ Anche non periodica: v. la nota 5.

la capitalizzazione: che non è più, dunque, periodica, ma è diventata “continua”. I nostri autori presentano invece, invariabilmente, l’interesse composto (il *«continuously compounded interest»*) come un *i.s.c.p.i.* (un *«periodically compounded interest»*); con l’aggravante di dichiarare esplicitamente (loro articolo (4), pag. 30) che non è rilevante la *«specificazione della durata del periodo»*. È molto semplice osservare che investire 1.000 euro per un anno al tasso del 10% genera il montante di 1.100; se si procede ad una capitalizzazione ogni sei mesi gli euro diventano 1.102,50; 1.104,71 se la capitalizzazione è mensile; 1.105,17 con la capitalizzazione continua (ossia, in interesse composto).

Quando abbiamo fatto notare (nostro articolo (7)) che riguardo la nozione di interesse composto, ovviamente prodromica per dare un senso ad ogni discorso su questi argomenti, dagli articoli (1), (2) e (6) si ricava *«un’idea alquanto confusa»*, abbiamo ricevuto la garbata risposta (articolo (8) pag. 419) che *«se i manuali di matematica finanziaria, da cui sono state tratte quelle definizioni, venissero letti con più attenzione si eviterebbe la circolazione di tante singolari interpretazioni»*.

Nella nostra opinione, un solo manuale, ma studiato bene, sarebbe più che sufficiente.

6. Nota autobiografica.

Riteniamo doveroso, per concludere, e vista l’insistenza dei Nostri sul punto, dare atto che negli scritti ante 2021 davamo ancora per scontato il concetto ingenuo di “equivalenza” (flussi con lo stesso valor attuale sono indistinguibili) cui essi sono rimasti ancora legati. Ci sembra ovvio che quanto scritto dopo, *re melius perpensa*, supera e sostituisce quanto scritto prima, senza bisogno di una ritrattazione formale. Se abbiamo tratto qualcuno in errore, ce ne scusiamo; ma la verità (si scusi la parola grossa) si scopre per gradi, e nella sua ricerca si può compiere anche qualche passo falso.

FABRIZIO CACCIAFESTA

ABSTRACT

In risposta ad un articolo di C.Mari e altri su questa Rivista, dimostriamo che la relazione di equivalenza soddisfatta dai prestiti non è affatto sufficiente a provare che essi si svolgano nel regime dell’interesse composto, la legge che

li regola essendo invece quella lineare con pagamento periodico degl'interessi. Illustriamo le differenze, che quegli autori negano esistere, tra questa, e le leggi dell'interesse semplice composto periodicamente, e dell'interesse composto. Siamo, infine, costretti a tornare sulla differenza tra le due operazioni di concordare un contratto di prestito e di valutarne uno già contrattualizzato.

In response to an article by C. Mari et al. in this Journal, we demonstrate that the equivalence relation the loans satisfy is by no means sufficient to prove that they take place according to compound interest, since the law governing them is instead the linear with periodic interest payments one. We illustrate the differences, which those authors deny, between this and the laws of periodically compounded simple interest, and compound interest. Finally, we are forced to return to the difference between the two operations of arranging and evaluating a loan.

